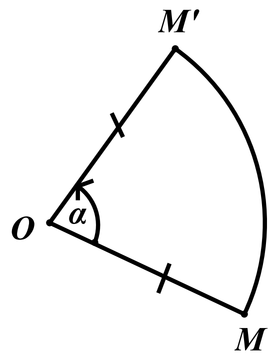
§4. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. Định nghĩa phép quay

Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α .



- Điểm O được gọi là *tâm quay*, còn α được gọi là *góc quay* của phép quay đó.
- Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$.

$$Q_{(O,\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases}.$$

2. Định lí

Phép quay là một phép dời hình.

3. Phép đối xứng tâm

Phép đối xứng qua điểm O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M’ đối xứng với M qua O, có nghĩa là $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

Nhận xét: Phép quay tâm O với góc quay π là phép đối xứng tâm O.

Kí hiệu và thuật ngữ

- Phép đối xứng qua điểm O thường được kí hiệu là $Đ_O$. Phép đối xứng qua một điểm còn gọi là phép đối xứng tâm.
- Điểm O gọi là tâm đối xứng.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm

Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $I(a;b)$. Nếu phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ thì

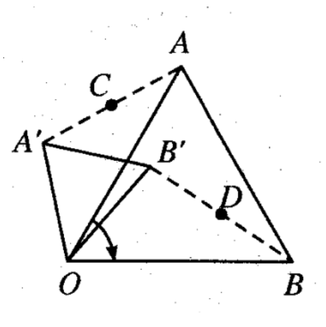
$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}.$$

Tâm đối xứng của một hình

Điểm O gọi là tâm đối xứng của một hình H nếu phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình H thành chính nó.

4. Ứng dụng của phép quay

Ví dụ 1. Cho hai tam giác đều OAB và OA’B’ như hình vẽ. Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA’ và BB’. Chứng minh tam giác OCD đều.



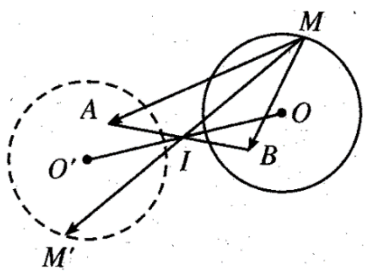
Giải

Xét phép quay Q tâm O với góc quay bằng một góc lượng giác (OA, OB). Ta có Q biến A thành B và biến A’ thành B’, nên Q biến đoạn thẳng AA’ thành đoạn thẳng BB’. Từ đó suy ra Q biến trung điểm C của AA’ thành trung điểm D của BB’. Do đó $OC = OD$ và $\widehat{COD} = 60^o$. Vậy OCD là tam giác đều.

Ví dụ 2. Cho đường tròn $(O;R)$ và hai điểm *A, B* cố định. Với mỗi điểm *M*, ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Tìm quỹ tích điểm M' khi điểm *M* chạy trên $(O;R)$.

Giải

Gọi I là trung điểm của AB thì I cố định và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.



Do đó $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$. Suy ra MM' nhận I làm trung điểm hay phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành điểm M'. Vậy khi M chạy trên đường tròn $(O;R)$ thì quỹ tích điểm M' là ảnh của đường tròn đó qua $Đ_I$. Nếu ta gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì quỹ tích của M' là đường tròn $(O';R)$.

Ví dụ 3. Cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $d: x+2y+3=0$. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm I.

Giải

Cách 1. Lấy điểm $M(x;y)\in d \Rightarrow x+2y+3=0\quad (*)$

Gọi $M'(x';y')=Đ_I(M)$ thì $\begin{cases} x'=2-x \\ y'=2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-x' \\ y=2-y' \end{cases}$.

Thay vào $(*)$ ta được $(2-x')+2(2-y')+3=0 \Leftrightarrow x'+2y'-9=0$

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': x+2y-9=0$.

Cách 2. Gọi d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm I, thì d' song song hoặc trùng với d nên phương trình d' có dạng $x+2y+c=0$.

Lấy $N(-3;0)\in d$, gọi $N'=Đ_I(N)$ thì $N'(5;2)$.

Lại có $N'\in d' \Rightarrow 5+2.2+c=0 \Leftrightarrow c=-9$.

Vậy $d': x+2y-9=0$.

Biên soạn: Huỳnh Kim Dũng.